Introducción a la homotopía estable

José Cantarero

November 1, 2017

En este documento todos los espacios son punteados, las funciones entre ellos son punteadas y ΣX denota la suspensión reducida de X, es decir

$$\Sigma X = X \times [0,1]/\sim$$

donde $(x,0) \sim (x',0)$ y $(x,1) \sim (x',1)$ para todo x, $x' \in X$ y también $(x_0,t) \sim (x_0,t')$ para todo t, $t' \in [0,1]$, donde x_0 es el punto base de X. En particular, si $*$ es el espacio con un solo punto, se tiene $\Sigma * = *$.

Denotaremos por $[X,Y]_*$ al conjunto de clases de homotopía punteada de funciones punteadas $X \to Y$. Por homotopía punteada se entiende una homotopía H tal que cada H_t es una función punteada.

1 Motivación

En la tabla de grupos de homotopía de las esferas se puede notar el siguiente patrón. A partir de cierto punto, los grupos en cada diagonal se empiezan a repetir. Es decir,

$$\pi_k(S^n) \cong \pi_{k+1}(S^{n+1})$$

si n es suficientemente grande. ¿Qué tan grande? El teorema de la suspensión de Freudenthal nos dice que esto es cierto si $n > (k+1)/2$. Más generalmente se cumple:

Teorema 1. *Si $i \geq n+2$, hay un isomorfismo*

$$\pi_{n+i}(\Sigma^i X) \cong \pi_{n+i+1}(\Sigma^{i+1} X)$$

Aparte de la condición sobre los índices, esto nos debe recordar al resultado análogo en homología o cohomología

$$\widetilde{H}_k(\Sigma X) \cong \widetilde{H}_{k-1}(X)$$

Otro comportamiento similar se puede observar en el siguiente teorema.

Teorema 2. *Si X, Y son CW-complejos finitos punteados, la sucesión*

$$[X, Y]_* \to [\Sigma X, \Sigma Y]_* \to [\Sigma^2 X, \Sigma^2 Y]_* \to \dots$$

estabiliza. Es decir, a partir de cierto punto, todas las funciones que siguen son biyecciones.

Este teorema nos lleva a la siguiente definición. Dados X, Y CW-complejos finitos punteados

$$\{X, Y\} = \varinjlim_n [\Sigma^n X, \Sigma^n Y]_*$$

Y a los elementos de conjunto se les llama clases de homotopía estables.

La homotopía estable es el estudio de estos fenómenos de estabilidad respecto a la suspensión. En particular, sería conveniente conocer estos conjuntos de clases de homotopía estables. Una pregunta natural que uno se podría hacer en este punto es:

Pregunta 3. *Dado un CW-complejo finito punteado X, ¿existe un espacio punteado $\Sigma^\infty X$ tal que:*

- $\pi_n(\Sigma^\infty X) \cong \varinjlim_i \pi_{n+i}(\Sigma^i X)$
- $[\Sigma^\infty X, \Sigma^\infty Y]_* \cong \{X, Y\}$ *para cualquier CW-complejo finito punteado Y.*
- $\Sigma(\Sigma^\infty X) \simeq \Sigma^\infty X$ *?*

La respuesta es no. Intuitivamente porque aunque las clases de homotopía $[\Sigma^n X, \Sigma^n Y]_*$ estabilizan, pero no necesariamente estabilizan en el mismo n para todo Y.

Pero ciertamente estas tres condiciones son muy apetecibles, así que no se quiere debilitar ninguna de ellas. Lo que permite contestar esta pregunta de manera positiva es debilitar que $\Sigma^\infty X$ sea un espacio. Claro que en ese caso ya no parece claro con qué sustituir las clases de homotopía punteadas o equivalencia homotópica.

Primera solución: La categoría de Spanier-Whitehead. Los objetos de esta categoría son pares (X, n), donde X es un CW-complejo finito punteado y $n \in \mathbb{Z}$. Normalmente este par se denota $\Sigma^{\infty+n} X$. Y los morfismos en esta categoría vienen dados por

$$\mathrm{Mor}(\Sigma^{\infty+n} X, \Sigma^{\infty+m} Y) = \varinjlim_i [\Sigma^{n+i} X, \Sigma^{m+i} Y]_*$$

La composición de dos morfismos viene dada por tomar un representante adecuado de cada uno de los morfismos y suspender uno de ellos hasta que se puedan componer.

Los objetos $\Sigma^\infty X$ en esta categoría satisfacen las condiciones de la pregunta si cambiamos clases de homotopía por morfismos en la categoría y equivalencias homotópicas por isomorfismos en la categoría.

Esta solución puede parecer un poco artificial, pero ciertamente es útil y se ha utilizado para dar interpretaciones de conceptos de dualidad, transfer, etc. Pero por ejemplo, no incluye CW-complejos generales y no es lo suficientemente flexible para hacer muchas construcciones dentro de ella.

Segunda solución: Espectros.

2 Espectros

Adams atribuye la invención de los espectros a Lima. Parece que Boardman y Whitehead también tuvieron mucho que ver con su comienzo.

Definición 4. Un espectro es una sucesión $\{E_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ de espacios punteados junto con funciones $\Sigma E_i \to E_{i+1}$ para todo i.

Veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 5. Si X es un espacio punteado, consideremos

$$\Sigma^\infty X = \{Y_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$$

donde

$$Y_n = \begin{cases} \Sigma^n X & \text{si } n \geq 0 \\ * & \text{si } n < 0 \end{cases}$$

Las funciones estructurales vienen dadas por la identidad $\Sigma(\Sigma^n X) \to \Sigma^{n+1} X$, la inclusión del punto base $\Sigma * \to X$ o la identidad $\Sigma * \to *$.

Ejemplo 6. Si $\widetilde{h}$ es una teoría de cohomología generalizada reducida, por el teorema de representabilidad de Brown, para cualquier CW-complejo punteado X existen isomorfismos naturales

$$\widetilde{h}^n(X) \cong [X, E_n]_*$$

para ciertos CW-complejos punteados E_n. En la sucesión exacta larga del par asociada al par (CX, X) el morfismo frontera

$$\widetilde{h}^n(X) \to \widetilde{h}^{n+1}(\Sigma X)$$

es un isomorfismo natural.

$$[X, E_n]_* \to [\Sigma X, E_{n+1}]_*$$

Usando la adjunción entre Σ y Ω obtenemos un isomorfismo natural

$$[X, E_n]_* \to [X, \Omega E_{n+1}]_*$$

Como es natural, tiene que venir inducido por una equivalencia homotópica $E_n \to \Omega E_{n+1}$. De nuevo por la adjunción esto determina funciones $\Sigma E_n \to E_{n+1}$. Así que una teoría de cohomología generalizada reducida determina un espectro.

Ya vemos que estamos obteniendo más objetos que en la categoría de Spanier-Whitehead y en particular, uno por cada teoría de cohomología, que es algo muy interesante.

Definición 7. Se dice que un espectro $\{E_i\}$ es un

- CW-espectro si cada E_n es un CW-complejo y las funciones $\Sigma E_n \to E_{n+1}$ son encajes con imagen un subcomplejo.
- Ω-espectro si todos los adjuntos $E_n \to \Omega E_{n+1}$ son equivalencias débiles.

¿Qué deberían ser los morfismos? Lo más fácil sería

Definición 8. Sean E y F espectros. Una función $f \colon E \to F$ de grado r es una sucesión de funciones $f_n \colon E_n \to F_{n-r}$ tales que los diagramas

$$\begin{tikzcd} \Sigma E_n \arrow[r, "\Sigma f_n"] \arrow[d] & \Sigma F_{n-r} \arrow[d] \\ E_{n+1} \arrow[r, "f_{n+1}"] & F_{n-r+1} \end{tikzcd}$$

conmutan.

Sin embargo, esta noción es demasiado rígida para nuestros propósitos. Los grupos de homotopía $\pi_{n+1}(S^n)$ estabilizan a partir de $n = 3$, y los generadores son las suspensiones de la fibración de Hopf $h \colon S^3 \to S^2$.

Uno de los morfismos que nos gustaría tener en esta teoría es un morfismo $\Sigma^\infty S^0 \to \Sigma^\infty S^0$ de grado uno que en dimensión tres sea precisamente la fibración de Hopf. Pero tal morfismo nos daría lugar a un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} \Sigma S^2 \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"] & \Sigma S^1 \arrow[d, "\simeq"] \\ S^3 \arrow[r, "h"] & S^2 \end{tikzcd}$$

Cualquier función $S^2 \to S^1$ es nulhomótopa, así que la función de la fila superior es nulhomótopa. Como las flechas verticales son homeomorfismos, esto nos diría que la fibración de Hopf es nulhomótopa, que sabemos no es cierto.

Así que con esta definición no hay una función con esas características que queremos. Necesitamos refinar un poco más.

Para definir los morfismos que nos van a servir, primero debemos hablar de subespectros. Sólo hablaremos de CW-complejos, que no supone una gran pérdida de generalidad.

Definición 9. Un subespectro de un CW-espectro E consiste de subcomplejos $A_n \subseteq E_n$ para cada n tales que la función $\Sigma E_n \to E_{n+1}$ envía ΣA_n dentro de A_{n+1}.

En particular, un subespectro es un espectro.

Definición 10. Se dice que un subespectro $\{A_i\}$ de $\{E_i\}$ es cofinal si para cada n y cada subcomplejo finito $K \subseteq E_n$, existe m tal que $\Sigma^m K$ se mapea dentro de A_{m+n} mediante las funciones estructurales de $\{E_i\}$.

Esto último quiere decir lo siguiente. Tenemos funciones $\Sigma E_n \to E_{n+1}$ y $\Sigma E_{n+1} \to E_{n+2}$, etc, lo cual nos dan funciones

$$\Sigma^m E_n \to \Sigma^{m-1} E_{n+1} \to \Sigma^{m-2} E_{n+2} \to \ldots \to E_{n+m}$$

Lo que pedimos es que esta composición mapee $\Sigma^m K$ dentro de A_{n+m}.

La idea de esto es que si bien $\{A_i\}$ no es igual a $\{E_i\}$, es cierto que contiene todas sus celdas una vez que las hayamos suspendido un número suficiente de veces. Como el propósito es estudiar fenómenos estables, un subespectro cofinal debería ser lo mismo que el espectro total.

Definición 11. Sean A_1 y A_2 dos subespectros cofinales de E. Se dice que dos funciones $f_1 \colon E_1 \to F$ y $f_2 \colon E_2 \to F$ son equivalentes si existe un subespacio cofinal A de E que está contenido en E_1 y E_2 y tal que f_1 y f_2 coinciden en A.

Definición 12. Un mapeo de E a F de grado r es una clase de equivalencia de tales funciones (de grado r).

Esta es la clave. Para definir un mapeo, no hace falta definirlo en el espectro total, solamente en un subespacio cofinal. Claro que ahora no está tan claro cómo se componen estos mapeos. Pero esto se logra gracias al siguiente lema.

Lema 13. *Si $f \colon E \to F$ es una función y F' es un subespectro cofinal de F, existe un subespectro cofinal E' de E tal que $f(E') \subseteq F'$.*

Dado un mapeo $f \colon E \to F$ y otro mapeo $g \colon F \to G$, escogemos una función $g' \colon F' \to G$ que represente a g y una función $f' \colon E' \to F$ que represente a f. Por el lema, podemos escoger un subespectro cofinal E'' de E tal que $f(E'') \subseteq F'$. La restricción de f' a $E' \cap E''$ también representa a f y ya la podemos componer con g'. Por supuesto, hay que comprobar que esto no depende de todas las elecciones de representantes que hicimos, pero funciona.

Con esta definición, ya podemos definir un mapeo $\Sigma^\infty S^0 \to \Sigma^\infty S^0$ de grado 1. Para ello consideremos el subespectro X de $\Sigma^\infty S^0$ dado por

$$X_i = \begin{cases} S^i & \text{si } i \geq 3 \\ * & \text{si } i < 3 \end{cases}$$

con las funciones estructurales obvias. Es bastante claro que es cofinal, pues las esferas S^0, S^1 y S^2 caen dentro de X tras hacer tres suspensiones a lo más. Ahora definimos la función de grado 1

$$f_i \colon X_i \to S^{i-1}$$

$$f_i = \begin{cases} \Sigma^i h & \text{si } i \geq 3 \\ c & \text{si } i < 3 \end{cases}$$

donde h es la fibración de Hopf y c es la función constante. Esto nos da entonces un mapeo $\Sigma^\infty S^0 \to \Sigma^\infty S^0$ de grado uno inducido por la fibración de Hopf como queríamos.

- Ejercicio: Demuestra que un subespacio cofinal de E es isomorfo a E. En el sentido de que existen mapeos tales que las respectivas composiciones son la identidad.

Ahora vamos a introducir la relación de homotopía entre mapeos. Dado un espectro E, definimos su cilindro $\mathrm{Cyl}(E)$ como el espectro con

$$\mathrm{Cyl}(E)_n = I^+ \wedge E_n$$

y las funciones estructurales dadas por las composiciones

$$\Sigma(I^+ \wedge E_n) = (I^+ \wedge E_n) \wedge S^1 \to I^+ \wedge (E_n \wedge S^1) \to I^+ \wedge E_{n+1}$$

donde la última función está inducida por la función estructural del espectro E.

Existen mapeos i_0, $i_1 \colon E \to \mathrm{Cyl}(E)$ dados por $e \mapsto (0, e)$ y $e \mapsto (1, e)$.

Definición 14. Se dice que dos mapeos f_0, $f_1 \colon E \to F$ de grado r son homótopos si existe un mapeo $h \colon \mathrm{Cyl}(E) \to F$ de grado r tal que $f_j = hi_j$ para $j = 0$, 1.

Y con esta definición denotamos por $[E, F]_r$ al conjunto de clases de homotopía de mapeos $E \to F$. En esta categoría de espectros y clases de homotopía se cumple todo lo que queríamos y además algunas otras cosas interesantes como por ejemplo:

- Si E es el espectro de una teoría de cohomología generalizada reducida h y X es un CW-complejo, entonces $h^n(X)$ es naturalmente isomorfa a $[X, E]_{-n}$.
- Si E es un CW-espectro y F es un Ω-espectro, entonces $[E, F]_r$ corresponde a clases de homotopías de funciones, no hace falta usar mapeos.

Además en esta categoría se pueden hacer construcciones como productos, sumas, conos, etc, lo que nos permite construir otros espectros a partir de otros dados. Esto tiene mucho potencial, ya que permite construir otras teorías de cohomología a partir de otras dadas.

Para concluir, hay que hacer notar que esta solución de los espectros todavía no es la más adecuada, pues el comportamiento del producto smash $\wedge$ de espectros no es tan bueno como uno quisiera. Para esto, se introdujeron los espectros simétricos y ortogonales, que solucionan esto, y además permiten una generalización más natural a qué deberían ser los espectros equivariantes.